数理解析研究所講究録
965巻 1996年 153-171

Spherical functions and local densities on hermitian forms

広中 由美子 (Yumiko Hironaka)
信州大学理学部

§0 初めに

k を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大，$*$ を k の involution とする．$v=(v_{ij})\in M_{mn}(k)$ に対して $v^*=(v_{ji}^*)\in M_{nm}(k)$ とおく．

$G=GL_n(k)$, $K=GL_n(\mathcal{O}_k)$, $X=\{x\in G \mid x^*=x\}$ とする．G は X に $g\cdot x=gxg^*$ で作用している．

これらの記号を用いると，我々の目的は次のように述べられる．

(1) spherical functions on X，つまり $\mathcal{C}^\infty(K\backslash X)$ 内の $\mathcal{H}(G,K)$ 同時固有関数を決定すること．ここで，$\Psi\in\mathcal{C}^\infty(K\backslash X)$ が $\mathcal{H}(G,K)$ 同時固有関数であるとは

$f*\Psi=\omega(f)\Psi \quad (\forall f\in\mathcal{H}(G,K))$ をみたす $\mathbb{C}$-algebra map $\omega:\mathcal{H}(G,K)\longrightarrow\mathbb{C}$ が存在するときに言う．

(2) (1) を用いて X 上の調和解析をすること．

(3) 応用として，表現の局所密度の公式を明示すること．

これは，[H1-4] で考察したうち，不分岐な場合のエルミート形式の球関数の理論を完成することになる．交代形式については，[HS] で理論が構築されている．

§1 X 上の球関数

以下，簡単の為，k は $k_0=\{x\in k \mid x^*=x\}$ 上不分岐と仮定する．$\pi\in k_0$ を k の素元，$\mathfrak{p}=\pi\mathcal{O}$，$\#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})=q$，$|\;|$ を $|\pi|=q^{-1}$ と正規化した k 上の付値とし，便宜上 $|0|=0$ としておく．$x\in X$ に対し，$\mathrm{d}_i(x)$ で x の左上の i 次小行列式を表す．

さて，$x\in X$ と $s=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し次の積分を考える．

$$\omega(x;s)=\int_K\prod_{i=1}^n|\mathrm{d}_i(k\cdot x)|^{s_i}\,dk.$$

ここで dk は $\int_K dk = 1$ と正規化した K 上の Haar 測度である.

これは，以前 [H1] で X 上の球関数として導入したもので，次の事実が分かっている. k/k_0 を不分岐と仮定したので，[H1,2,3] の結果は $p=2$ でもそのまま成立する．但し，ここでは $|\mathcal{O}/\mathfrak{p}| = q$ としていることに注意.

[1] 右辺は $\mathrm{Re}(s_1), \ldots, \mathrm{Re}(s_{n-1}) \geq 0$ ならば絶対収束し，$q^{s_1}, \ldots, q^{s_n}$ の有理関数に解析接続される ([H1]) .

[2] $\omega(x; s)$ は $\mathcal{H}(G, K)$- 同時固有関数である ([H1]) . より詳しく言うと以下のようになっている.

G 上の関数 $\Psi_\nu(g)$ $(\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n)$ を次で定義する：

$$\Psi_\nu(g) = \prod_{i=1}^{n} |a_i|^{\nu_i}, \quad \text{但し } g = k \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, \ k \in K.$$

このとき，$\nu_z = (2z_n, \ldots, 2z_1)$ として次の $\mathbb{C}$-algebra isomorphism (佐武同型) を得る：

$$(1.1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}(G, K) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[q^{\pm 2z_1}, \ldots, q^{\pm 2z_n}]^{S_n} \\ f & \longmapsto & \widetilde{f}(z) = \int_G f(g) \Psi_{\nu_z}(g) dg, \end{array}$$

ここで S_n は n 次対称群で $z_1, \ldots, z_n$ の置換として作用する．一方，

$$(1.2) \qquad \begin{cases} s_i = -z_i + z_{i+1} - \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q} & (1 \leq i \leq n-1) \\ s_n = -z_n + \frac{n-1}{4} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q} \end{cases}$$

によって変数変換し z- 変数で表したものを $\omega(x; z)$ と書く．これらの記号を用いると，

$$(1.3) \qquad (f * \omega(\ ; z))(x) = \widetilde{f}(z)\omega(x; z), \quad \forall f \in \mathcal{H}(G, K).$$

[3] $\omega(x; z)$ の関数等式と極の位置については次のように分かっている ([H3, §2])：

$$(1.4) \qquad \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{z_j} + q^{z_i}}{q^{z_j} - q^{z_i - \frac{1}{2}}} \cdot \omega(x; z) \in \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \ldots, q^{\pm z_n}]^{S_n}.$$

さて，

$$\Lambda_n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\},$$

$$\pi^\lambda = \begin{pmatrix} \pi^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \Lambda_n)$$

とおくと，$\left\{\pi^\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n\right\}$ が X の K-軌道の代表系をなす．一方，$\omega(x;s)=\omega(x;z)$ は K-不変なので，この代表系での値を調べれば十分である．

G の放物的部分群 $P=\{p=(p_{ij})\in G \mid p_{ij}=0 \text{ unless } i\geq j\}$ をとり，その左不変測度を $d_l(p)$ とし，P の指標 $\delta(p)$ を $d_l(pq)=\delta(q)^{-1}d_l(p)$ で定める．

$X'=\left\{x\in X \;\middle|\; \prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}_i(x)\neq 0\right\}$ は $X'=\bigsqcup_{u\in\{0,1\}^n} X_u$ と P-軌道に分解される．ここで，X_u は k 上の加法的付値 v_π を用いて，

$$X_u=\{x\in X \mid v_\pi(\mathrm{d}_i(x))\equiv u_1+\cdots u_i (\mathrm{mod} 2)\}$$

と与えられる．X_u の特性関数を ch_{X_u} と表す．$g\in G,\ x\in X, u\in\{0,1\}^n$ に対し

$$d^s(g;x)=d^z(g;x)=\prod_{i=1}^{n}|\mathrm{d}_i(g\cdot x)|^{s_i},$$

$$d_u^s(g;x)=d_u^z(g;x)=\mathrm{ch}_{X_u}(g\cdot x)d^s(g;x). \tag{1.5}$$

$$\omega_u^s(x)=\omega_u^z(x)=\int_K d_u^s(k;x)dk$$

と定める．明らかに

$$\omega(x;z)=\sum_u \omega_u^z(x) \tag{1.6}$$

である．$B=\left\{(b_{ij})\in K \mid b_{ii}\in\mathcal{O}^\times \text{ for } \forall i,\ b_{ij}\in\mathfrak{p} \text{ if } i<j\right\}$ とおく．また，G 上の関数 f と $H=K$ または B について

$$\mathcal{P}_H f(g)=\int_H f(gh)dh$$

と定義する，但し dh は $\int_H dh=1$ と正規化された H 上の Haar 測度とする．Casselman[C] の方法をたどって次の補題を得る．

Lemma 1.1

$$\left(\omega_u^s(x)\right)_u=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-i}}\sum_{\sigma\in S_n}\gamma(\sigma z)B_\sigma(z)\left(\mathcal{P}_B(d_u^{\sigma s}(\ ;x))(1)\right)_u$$

ここで両辺は u が $\{0,1\}^n$ を渡る 2^n 次元のベクトルで，

$$\gamma(z)=\prod_{1\leq i<j<\leq n}\frac{q^{2z_j}-q^{2z_i-1}}{q^{2z_j}-q^{2z_i}}.$$

$B_\sigma(z)\in M_{2^n}(\mathbb{C}(q^{z_1},\ldots,q^{z_n}))$ は $\left(\omega_u^z(x)\right)_u=B_\sigma(z)\left(\omega_u^{\sigma z}(x)\right)_u$ をみたす行列である．

Proof. P の指標 χ を

$$\chi(p) = \prod_{i=1}^{n} |p_i|^{z_i} \qquad p = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & p_n \end{pmatrix} \in P$$

によって定める．$\sigma(\chi) \neq \chi$ $(\forall\sigma \in S_n, \sigma \neq 1)$ なので [C] の意味で "regular" である．G への誘導表現を

$$I(\chi) = \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{locally constant} \\ f(pg) = \chi\delta^{\frac{1}{2}}(p)f(g) \quad (\forall p \in P, \forall g \in G) \end{array} \right\}$$

とすると $d^s(g : x), d_u^s(g; x) \in I(\chi)$ である．$I(\chi)^B = \{f \in I(\chi) \mid f(gb) = f(g)\ (\forall b \in B)\}$ の基底 $\{f_{\sigma,s}(g) \mid \sigma \in S_n\}$ を [C] の intertwining operator $T_\sigma : I(\chi) \longrightarrow I(\sigma(\chi))$ に関して

$$T_\sigma(f_{\tau,s})(1) = \delta_{\sigma,\tau} \quad (\sigma, \tau \in S_n,\ \delta_{\sigma,\tau} \text{ は Kronecker delta})$$

をみたすようにとる (cf.[C, p.402])．そうすると，

$$\mathcal{P}_B(d_u^s(\ ; x))(g) = \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma \circ \mathcal{P}_B\left(d_u^s(\ ; x)\right)(1) f_{\sigma,s}(g) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathcal{P}_B \circ T_\sigma\left(d_u^s(\ ; x)\right)(1) f_{\sigma,s}(g)$$

となる．また，

$$\left(T_\sigma(d_u^s(\ ; x))\right)_u = A_\sigma(s)\left(d_u^{\sigma s}(\ ; x)\right)_u \quad (u \in \{0, 1\}^n)$$

をみたす 2^n 次の行列 $A_\sigma(s)$ が存在する．従って

$$\begin{aligned} \left(\omega_u^s(x)\right)_u &= \left(\int_K \mathcal{P}_B(d_u^s(\ ; x))(k)dk\right)_u \\ &= \left(\sum_\sigma \mathcal{P}_B \circ T_\sigma(d_u^s(\ : x))(1)\int_K f_{\sigma,s}(k)dk\right)_u \\ &= \sum_\sigma \mathcal{P}_K f_{\sigma,s}(1) A_\sigma(s)\left(\mathcal{P}_B(d_u^{\sigma s}(\ ; x))(1)\right)_u \end{aligned}$$

となる．さて，再び [C, p.403-4] によって

$$\mathcal{P}_K f_{\sigma,s}(1) = \frac{\gamma(\sigma(\chi))}{Q \cdot C_\sigma(\chi)}$$

が分かる，ここで，

$$\gamma(\sigma(\chi)) = \gamma(\sigma(z)) = \prod_{i>j} \sigma\left(\frac{1 - q^{2z_j - 2z_i - 1}}{1 - q^{2z_j - 2z_i}}\right).$$

$$Q = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - q^{-i}}{1 - q^{-1}}$$

である．従って

$$\left(\omega_u^s(x)\right)_u = \frac{1}{Q}\sum_{\sigma\in S_n}\frac{\gamma(\sigma(z))}{C_\sigma(\chi)}A_\sigma(s)\left(\mathcal{P}_B(d_u^{\sigma s}(\ ;x))(1)\right)_u$$

を得る．ここで（χ, s は z と一意的に対応しているので）

$$B_\sigma(z) = \frac{1}{C_\sigma(\chi)}A_\sigma(s)$$

とおくと，右辺のそれぞれが cocycle relation を満たすことから

$$\left(\omega_u^{\sigma s}(x)\right)_u = B_\sigma(z)^{-1}\left(\omega_u^s(x)\right)_u$$

が分かり，求める式を得た． ∎

Lemma 1.2 任意の$\lambda\in\Lambda_n$ について$<\pi^\lambda> = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}\cdot\pi^\lambda$ とおくと，次式を得る：

$$\mathcal{P}_B(d_u^s(\ ;<\pi^\lambda>))(1) = ch_{X_u}(<\pi^\lambda>)(-1)^{\sum_{i=1}^n i\lambda_i}q^{-\sum_{i=1}^n \frac{n-2i+1}{4}\lambda_i}q^{<j(z),\lambda>},$$

ここで，

$$<z,\lambda> = \sum_{i=1}^n z_i\lambda_i, \qquad j(z) = (z_n,\ldots,z_1).$$

Proof. $\mathcal{P}_B$ と B の定義から $\mathcal{P}_B(d_u^s(\ ;<\pi^\lambda>)) = \mathrm{ch}_{X_u}(<\pi^\lambda>)d^s(1;<\pi^\lambda>)$ が分かり，計算によって与式を得る． ∎

Theorem 1 任意の $\lambda\in\Lambda_n$ について

$$\omega(\pi^\lambda;z) = (-1)^{\sum_{i=1}^n i\lambda_i}q^{-\sum_{i=1}^n\frac{n-2i+1}{4}\lambda_i}\prod_{i=1}^n\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-i}}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{q^{z_j}-q^{z_i-\frac{1}{2}}}{q^{z_j}+q^{z_i}}$$

$$\times\sum_{\sigma\in S_n}\sigma\left(q^{<z,\lambda>}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{q^{z_i}+q^{z_j-\frac{1}{2}}}{q^{z_i}-q^{z_j}}\right),$$

ここで $\sigma\in S_n$ は $z=(z_1,\ldots,z_n)$ に$\sigma(z) = (z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)})$ と作用する．

Remark. 少しあとで定義する記号を用いると

$$\omega(\pi^{\lambda};z)=(-1)^{n(\lambda)+|\lambda|}q^{\frac{n(\lambda)}{2}-\frac{n-1}{4}|\lambda|}(1-q^{-\frac{1}{2}})^{n}\ \frac{w_{\lambda}^{(n)}(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n}(q^{-1})}$$

$$\times\prod_{1\le i<j\le n}\frac{q^{z_j}-q^{z_i-\frac{1}{2}}}{q^{z_j}+q^{z_i}}P_{\lambda}(q^{z_1},\dots,q^{z_n};-q^{-\frac{1}{2}})$$

と表せる.

Proof. $\chi=(\chi_1,\dots,\chi_n)\in\left\{\left(k_0^{\times}/N(k^{\times})\right)^{\wedge}\right\}^{n}$, つまり χ_i は $\chi^{*}(\pi)=-1$ で決まる $k^{\times}$ の指標 χ^{*} または自明な指標で, 便宜的に $\chi_i(0)=0$ としておく.

$$\begin{aligned}L(x;\chi;s)&=L(x;\chi;z)\\&=\int_K\prod_{i=1}^{n}|\mathrm{d}_i(k\cdot x)|^{s_i}\ \chi_i(\mathrm{d}_i(k\cdot x))dk\end{aligned}\qquad(1.7)$$

と定めると, 明らかに次をみたす:

$$L(x;\chi;s)=\sum_u\chi(u)\omega_u^{s}(x),\quad 但し\ \chi(u)=\prod_{i=1}^{n}\chi_i(\pi^{(u_1+\cdots u_i)}).$$

$\chi_i(\pi)=(-1)^{e_{\chi_i}}$ により $e_{\chi_i}\in\{0,1\}$ を定め, $s_i^{(\chi)}=s_i+e_{\chi_i}\dfrac{\pi\sqrt{-1}}{\log q}$ とおき, (1.2) の変数変換で $s^{(\chi)}$ と対応する z-変数を $z^{(\chi)}$ と表す, 従って $z_i^{(\chi)}=z_i+\sum_{j=i}^{n}e_{\chi_j}\dfrac{\pi\sqrt{-1}}{\log q}$. このとき,

$$L(x;\chi;z)=\omega(x;s^{(\chi)})=\omega(x;z^{(\chi)})$$

なので (1.4) により $L(x;\chi;z)$ の関数等式が分かり, それは次のように表せる. s-変数と z-変数の関係から, $\sigma\in S_n$ と χ に対して指標 ψ が定まって $\omega(x;\sigma(z^{(\chi)}))=L(x;\psi;\sigma(z))$ となる. 以下この ψ を $\sigma(\chi)$ と表す. そうすると, 任意の$\sigma\in S_n$ に対して

$$L(x;\sigma(\chi);\sigma(z))=f_{\chi}(\sigma;z)L(x;\chi;z)$$

ここで

$$f_{\chi}(\sigma;z)=\prod_{i<j}\frac{(-1)^{\sum_{r\ge\sigma(j)}e_{\chi_r}}q^{z_{\sigma(j)}}-(-1)^{\sum_{r\ge\sigma(i)}e_{\chi_r}}q^{z_{\sigma(i)}-\frac{1}{2}}}{(-1)^{\sum_{r\ge j}e_{\chi_r}}q^{z_j}-(-1)^{\sum_{r\ge i}e_{\chi_r}}q^{z_i-\frac{1}{2}}}.\qquad(1.8)$$

そこでそれぞれ 2^n 次の行列を

(1.9) $$F(\sigma, z) = Diag(f_\chi(\sigma; z))_\chi, \ A = (\chi(u))_{\chi,u}, \ \sigma A = (\sigma(\chi)(u))_{\chi,u}$$

とおくと，

(1.10) $$A\left(\omega_u^z(x)\right)_u = F(\sigma; z)^{-1}\sigma A\left(\omega_u^{\sigma(z)}(x)\right)_u$$

を得る．(1.6) と χ が自明なときは $\sigma(\chi)$ も自明であることとに注意して計算すれば定理が得られる． ∎

Theorem 2 $\Psi_z(x) = \omega(x; z)/\omega(1_n; z)$ とおく．$\mathcal{H}(G, K)$-加群としての同型である次の球フーリエ変換 $\wedge$ を得る：

$$\begin{array}{rccl} \wedge: & \mathcal{S}(K\backslash X) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]^{S_n} \\ & \varphi & \longmapsto & \hat{\varphi}(z) = \int_X \varphi(x)\Psi_z(x^{-1})dx. \end{array}$$

ここで，右辺は *(1.1)* を通して $\mathcal{H}(G, K)$-加群とみなし，dx は $\int_{K\cdot 1_n} dx = 1$ と正規化した X 上の G-不変測度である． 特に $\mathcal{S}(K\backslash X)$ は階数 2^n の $\mathcal{H}(G, K)$-自由加群である．

Proof.

$$\begin{array}{rccl} \wedge: & \mathcal{S}(K\backslash X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}) \\ & \varphi & \longmapsto & \hat{\varphi}(z) = \int_X \varphi(x)\Psi_z(x^{-1})dx. \end{array}$$

が $\mathcal{H}(G, K)$-加群としての単射であることは [H1] で示した．定理1から像が $\mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]^{S_n}$ であることが分かる． ∎

次の2つの定理の証明には，いくらか記号などの準備が必要なので証明は後回しにする．

Theorem 3 Plancherel Formula

$\mathfrak{a}^* = \left\{\sqrt{-1}\left(\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\log q}\mathbb{Z}\right)\right\}^n$ とし， $\mathfrak{a}^*$ 上の測度 $d\mu(z)$ を次のように定める：

$$d\mu(z) = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-(-q^{-\frac{1}{2}})^i}{1+q^{-\frac{1}{2}}}\frac{dz}{|c(z)|^2}.$$

但し，dz は $\int_{\mathfrak{a}^*} dz = 1$ と正規化した $\mathfrak{a}^*$ の $Haar$ 測度で

$$c(z) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{q^{z_i} + q^{z_j - \frac{1}{2}}}{q^{z_i} - q^{z_j}}$$

とする．このとき，任意の$\varphi, \psi \in \mathcal{S}(K\backslash X)$ に対して次式が成立する：

$$\int_X \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}(z)\overline{\hat{\psi}(z)}d\mu(z).$$

Theorem 4 <u>*inversion formula*</u>

任意の $\varphi \in \mathcal{S}(K\backslash X)$ について次式が成立する：

$$\varphi(x) = (-1)^{(n+1)\det x}\int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}(z)\Psi_z(x)d\mu(z) \qquad (\forall x \in X).$$

Theorem 2 と Theorem 1 の証明で導入した記号を用いて次が分かる．

Theorem 5 $\left\{ L(x;\lambda;z) \;\middle|\; \lambda \in \left\{ \left(k_0^\times / N(k^\times)\right)^\wedge \right\}^n \right\}$ が $\mathcal{C}^\infty(K\backslash X)$ 内の $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数の基底をなす．

さて，ここで，Macdonald[M] から必要な記号と結果をまとめておく．
$\lambda \in \Lambda_n$ に対して

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \qquad n(\lambda) = \sum_{i=1}^n (i-1)\lambda_i.$$

とおく．$m \in \mathbb{N}$ について $w_m(t) = \prod_{i=1}^m (1 - t^i)$, $w_0(t) = 1$ として，$\lambda \in \Lambda_n$ については

$$w_\lambda^{(n)}(t) = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} w_{m_i(\lambda)}(t), \qquad m_i(\lambda) = \#\{j \mid \lambda_j = i\}. \tag{1.11}$$

と定める．

$$\Lambda_n^+ = \{\lambda \in \Lambda_n \mid \lambda_n \ge 0\}$$

とおき，$m < n$ のとき

$$\Lambda_m^+ \ni \lambda \longmapsto (\lambda_1, ..., \lambda_m, 0, ..., 0) \in \Lambda_n^+$$

によって $\Lambda_m^+ \subset \Lambda_n^+$ とみなす．$|\lambda|, n(\lambda)$ は変わらないが，$w_\lambda^{(n)}(t)$ は n に依存する．
$\lambda, \mu \in \Lambda_n^+$ について

$$\lambda \geq \mu \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i, \ \forall i$$

$$\lambda \supset \mu \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lambda_i \geq \mu_i \quad \forall i;$$

$$\lambda \cap \mu = \nu, \text{ with } \nu_i = \min\{\lambda_i, \mu_i\};$$

$${}^t\lambda \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n, \text{ with } {}^t\lambda_i = \#\{j \mid \lambda_j \geq i\}$$

とする．$\lambda \in \Lambda_n$ に対し，$x_1, ..., x_n$ と t の多項式 $R_\lambda(x;t)$ と Hall-Littlewood 多項式 $P_\lambda(x;t)$ は次のように定義される：

$$(1.12) \qquad \begin{aligned} R_\lambda(x;t) &= R_\lambda(x_1, ..., x_n; t) = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right); \\ P_\lambda(x;t) &= P_\lambda(x_1, ..., x_n; t) = \frac{(1-t)^n}{w_\lambda^{(n)}(t)} R_\lambda(x_1, ..., x_n; t), \end{aligned}$$

ここで n 次対称群 S_n は $\{x_1, ..., x_n\}$ に添字の置換として作用する．
$\{P_\lambda(x;t) \mid \lambda \in \Lambda_n^+\}$ は $\mathbb{Z}[t][x_1, ..., x_n]^{S_n}$ の $\mathbb{Z}[t]$-基底，$\{P_\lambda(x;t) \mid \lambda \in \Lambda_n\}$ は $\mathbb{Z}[t][x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]^{S_n}$ の $\mathbb{Z}[t]$-基底になっている．そこで，$\lambda, \mu, \nu \in \Lambda_n^+$ に対して $f_{\mu,\nu}^\lambda(t) (\in \mathbb{Z}[t])$ を

$$(1.13) \qquad P_\mu(x;t) P_\nu(x;t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} f_{\mu,\nu}^\lambda(t) P_\lambda(x;t)$$

によって定義される構造定数とする．

$$f_{\mu,\nu}^\lambda(t) = 0 \quad \text{unless} \quad |\lambda| = |\mu| + |\nu| \quad \text{and} \quad \lambda \supset \mu, \nu.$$

である ([M, III-§3])．$y_1, ..., y_r$ と t の多項式 $P_{\lambda/\mu}(y;t)$ は shape (μ, λ) of length r の tableau 達から定義される $\mathbb{Z}[t]$-係数の多項式で

$$(1.14) \qquad P_\lambda(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_r; t) = \sum_{\mu \in \lambda_m^+} P_{\lambda/\mu}(y_1, ..., y_r; t) P_\mu(x_1, ..., x_m; t),$$

をみたすものである．

$$P_{\lambda/\mu}(y;t) = 0 \quad \text{unless} \quad 0 \leq {}^t\lambda_i - {}^t\mu_i \leq r$$

となる ([M, III-§5]). $\lambda \in \cup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n^+$ について

$$b_\lambda(t) = \prod_{i\geq 1} w_{m_i(\lambda)}(t)$$

と定めると,

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq r}} \frac{1-tx_iy_j}{1-x_iy_j} = \sum_{\lambda\in\Lambda_m^+\cap\Lambda_r^+} b_\lambda(t)P_\lambda(x_1,\dots,x_m;t)P_\lambda(y_1,\dots,y_r;t) \tag{1.15}$$

をみたす ([M, III-(4.4)]). 多項式 $P_\lambda(x;0)$, $\lambda\in\Lambda_n^+$ は S-多項式と呼ばれ, 対称群の表現論で重要な役割を果たす. これも $\mathbb{Z}[t][x_1,\dots,x_n]$ の $\mathbb{Z}[t]$-基底で次の関係式を満たす:

$$P_\lambda(x;0) = \sum_{\mu\in\Lambda_n^+} K_{\lambda\mu}(t)P_\mu(x;t), \tag{1.16}$$

ここで

$$K_{\lambda\mu}(t) = 0 \quad \text{unless} \quad \lambda\geq\mu \quad \text{and} \quad |\lambda| = |\mu|$$

である ([M,III §6], [LS]).

ここであげた $f_{\mu\nu}^\lambda(t), P_{\lambda/\mu}(y;t), K_{\lambda\mu}(t)$ について詳しい計算などは [M], [LS] で扱われている.

これらの記号を用いれば

$$\Psi(\pi^\lambda;z) = (-1)^{n(\lambda)+|\lambda|} q^{\frac{n(\lambda)}{2}-\frac{n-1}{4}|\lambda|} \frac{w_\lambda^{(n)}(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_n(-q^{-\frac{1}{2}})} P_\lambda(q^{z_1},\dots,q^{z_n};-q^{-\frac{1}{2}}) \tag{1.17}$$

となる.

Proof of Theorem 3. $\lambda\in\Lambda_n$ について [H1, (2.3)] により

$$v(K\cdot\pi^\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{K\cdot\pi^\lambda} dx \;=\; q^{\frac{n-1}{2}|\lambda|-n(\lambda)} \frac{w_n(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})}, \tag{1.18}$$

但しここでは, 添字 (n) を省いて $w_\lambda(t) = w_\lambda^{(n)}(t)$ としている. また $-\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (-\lambda_n,\dots,-\lambda_1)\in\Lambda_n$ とすると

$$v(K\cdot\pi^{-\lambda}) = v(K\cdot\pi^\lambda)$$

が分かる. $\lambda\in\Lambda_n$ に対し, $K\cdot\pi^{-\lambda}$ の特性関数を φ_λ とおく. 定理の証明には

$$\int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}_\lambda(z)\overline{\hat{\varphi}_\mu(z)}d\mu(z) = \delta_{\lambda,\mu}\, v(K\cdot\pi^\lambda) \quad (\forall\lambda,\mu\in\Lambda_n) \tag{1.19}$$

を示せば十分である．ここで

$$R_\lambda(z) = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma\left(q^{<\lambda,z>} c(z)\right)$$

とおくと

$$\hat{\varphi_\lambda}(z) = v(K \cdot \pi^\lambda)\Psi_z(\pi^\lambda) = (-1)^{n(\lambda)+|\lambda|} q^{\frac{n-1}{4}|\lambda| - \frac{n(\lambda)}{2}} \frac{(1+q^{-\frac{1}{2}})^n}{w_\lambda^{(n)}(-q^{-\frac{1}{2}})} R_\lambda(z) \tag{1.20}$$

である．$t \in \mathbb{Z}$ について $\lambda + t = (\lambda_1 + t, \dots, \lambda_n + t)$ とすると，

$$v(K \cdot \pi^{\lambda+t}) = v(K \cdot \pi^\lambda), \quad \hat{\varphi_{\lambda+t}}(z) = q^{t(z_1+\cdots z_n)} \hat{\varphi_\lambda}(z)$$

なので

$$\lambda, \mu \in \Lambda_n^+$$

と仮定して良い．記号の簡略化のために

$$< R_\lambda, R_\mu > = \int_{\mathfrak{a}^*} R_\lambda(z) \overline{R_\mu(z)} \frac{dz}{|c(z)|^2}$$

とおく．$|c(z)|^2$ は S_n-不変なので

$$\begin{aligned} \frac{R_\lambda(z)}{|c(z)|^2} &= \sum_{\sigma \in S_n} \sigma\left(q^{<\lambda,z>} \prod_{i<j} \frac{1-q^{z_i-z_j}}{1+q^{z_i-z_j-\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \sum_\sigma \sigma\left(q^{<\lambda,z>} \prod_{i<j} (1-q^{z_i-z_j}) \sum_{r \ge 0} (-q^{-\frac{1}{2}})^r q^{r(z_i-z_j)}\right). \end{aligned}$$

整理して

$$\frac{R_\lambda(z)}{|c(z)|^2} = \sum_{b \in B} c_b \sum_{\sigma \in S_n} \sigma\left(q^{<\lambda+b,z>}\right)$$

とできる．但し，

$$B = \left\{ \sum_{i<j} m_{ij} e_{ij} \mid m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

(e_{ij} は 第 i 成分 $=1$，第 j成分 $=-1$，その他 $=0$ で決まる Λ_n の元)

$$c_b \in \mathbb{R}, \quad c_0 = 1 \quad (0 = (0, \dots, 0) \in B)$$

とする．一方，[M, I-§6, III-§6] により

$$R_\mu(z) = \frac{w_\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})}{(1+q^{-\frac{1}{2}})^n} \sum_{\substack{\nu \in \Lambda_n^+ \\ \nu \le \mu, |\nu| = |\mu|}} d_\nu \sum_{\sigma \in S_n} \sigma\left(q^{<\nu,z>}\right).$$

ここで,

$$d_\nu \in \mathbb{C}, \quad d_\mu = \# S_n^\mu \quad (S_n^\mu \overset{\mathrm{def}}{=} \{\sigma \in S_n \mid \sigma(\mu) = \mu\})$$

と表される．従って

$$< R_\lambda, R_\mu >= \frac{w_\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})}{(1+q^{-\frac{1}{2}})^n} \sum_{b \in B} \sum_{\substack{\nu \in \Lambda_n^+ \\ \nu \leq \mu, |\nu| = |\mu|}} c_b \overline{d_\nu} \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \int_{\mathfrak{a}^*} q^{<\sigma(\lambda+b), z> + <\tau\nu, -z>} dz$$

を得る．これから $< R_\lambda, R_\mu > \neq 0$ ならば $\lambda \leq \mu$ であることが分かる．一方

$$< R_\mu, R_\lambda >= \overline{< R_\lambda, R_\mu >}$$

なので，$\lambda \neq \nu$ ならば$< R_\lambda, R_\mu >= 0$ である．また

$$< R_\lambda, R_\lambda >= \frac{n! w_\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})}{(1+q^{-\frac{1}{2}})^n}$$

であり，$d\mu(z)$ の定義と (1.18),(1.20) を合わせて (1.19) を得て証明が終わる． ∎

Proof of Theorem 4. $\varphi \in \mathcal{S}(K \backslash X)$ とする．$\forall x \in X$ をとり，$K \cdot x$ の特性関数を v と表すと，

$$\varphi(x) = \frac{1}{v(K \cdot x)} \int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}(z) \overline{\hat{v}(z)} d\mu(z) = \int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}(z) \overline{\Psi_z(x^{-1})} d\mu(z)$$

となる．(1.17) から

$$\overline{\Psi_z(x^{-1})} = (-1)^{(n+1)\det x} \Psi_z(x)$$

が分かり，与式を得る． ∎

§2 local desities

以下，$m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ とする．

$$X_n = \{x \in GL_n(k) \mid x^* = x\}, \quad X_n(\mathcal{O}) = X_n \cap M_n(\mathcal{O}), \quad K_n = GL_n(0)$$

と定義し，$X_m, X_m(\mathcal{O}), K_m$ も同様に定義する．$\mathfrak{p} = \pi\mathcal{O}$ とおく．

$x \in X_n(\mathcal{O}), y \in X_m(\mathcal{O})$ とする. local density $\mu(y,x)$ と primitive local density $\mu^{pr}(y,x)$ を次のように定義する：

$$\mu(y,x) = \lim_{d\to\infty} \frac{N_d(y,x)}{q^{dm(n-\frac{m}{2})}};$$
(2.1)
$$\mu^{pr}(y,x) = \lim_{d\to\infty} \frac{N_d^{pr}(y,x)}{q^{dm(n-\frac{m}{2})}},$$

但し

$$N_d(y,x) = \#\left\{v \in M_{m,n}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^d) \mid vxv^* \equiv y(\mathrm{mod}\mathfrak{p}^d)\right\};$$

$$N_d^{pr}(y,x) = \#\left\{v \in M_{m,n}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^d) \mid v = \begin{pmatrix}1_m & 0\end{pmatrix}\tilde{v}\ (\exists\tilde{v} \in K_n),\quad vxv^* \equiv y(\mathrm{mod}\mathfrak{p}^d)\right\}.$$

$x' \in K_n \cdot x$, $y' \in K_m \cdot y$ ならば, 定義から明らかに$\mu(y',x') = \mu(y,x)$, $\mu^{pr}(y',x') = \mu^{pr}(y,x)$ である.

§1 の後半で準備した記号を使う. 次の補題 ([H1,§2 Theorem]) により, 球関数と局所密度が結びつく.

Lemma 2.1 任意の $\xi \in \Lambda_n^+$ について

$$\begin{aligned}
&\omega(\pi^\xi; s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0)\\
&= c_{n,m} \sum_{\lambda\in\Lambda_m^+} \frac{\mu^{pr}(\pi^\lambda, \pi^\xi)}{w_m(\lambda)} \cdot q^{-n(\lambda)-\frac{1}{2}|\lambda|}\omega(\pi^\lambda; s_1, \dots, s_m)\\
&= c_{n,m}\prod_{i=1}^{m}(1-q^{-2s_i-\cdots-2s_m-n+i-1}) \sum_{\lambda\in\Lambda_m^+} \frac{\mu(\pi^\lambda, \pi^\xi)}{w_m(\lambda)} \cdot q^{-n(\lambda)-\frac{1}{2}|\lambda|}\omega(\pi^\lambda; s_1, \dots, s_m),
\end{aligned}$$

ここで

$$c_{n,m} = \frac{w_m(q^{-1})w_{n-m}(q^{-1})}{w_n(q^{-1})};$$

$$w_m(\lambda) = w_\lambda^{(m)}(-q^{-\frac{1}{2}}) \quad for\ \lambda \in \Lambda_m^+.$$

Theorem 6 任意の $\xi \in \Lambda_n^+$，$\lambda \in \Lambda_m^+$ について

$$\mu^{pr}(\pi^\lambda, \pi^\xi) = (-1)^{n(\xi)+n(\lambda)+(m-n+1)|\xi|+|\lambda|} q^{\frac{1}{2}(n(\xi)+n(\lambda)+(m-n+1)|\xi|)} \times w_n(\xi)$$

$$\times \sum_{\mu,\nu}{}' \left\{ (-1)^{n(\nu)+|\nu|} q^{-\frac{n(\nu)}{2}} f_{\mu\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) \frac{b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n-m}(\nu)} \right.$$

$$\left. \times P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, ..., (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) \right\}.$$

ここで $\sum_{\mu,\nu}{}'$ において μ, ν は

$\mu \in \Lambda_m^+$，$\nu \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_{n-m}^+$，$\mu \subset \xi \cap \lambda$，$\nu \subset \lambda$，$|\lambda| = |\mu| + |\nu|$，$0 \le {}^t\xi_i - {}^t\mu_i \le n-m \ (i \ge 1)$

をみたすもの全体を動く．

Proof. $z_1, ..., z_m$ を $s_1, ..., s_m$ に対応する z-変数，$z_1^{(n)}, ..., z_n^{(n)}$ を $s_1, ..., s_m, 0, ..., 0$ に対応する z-変数とする．

$$[A] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \omega(\pi^\xi; s_1, ..., s_m, 0, ..., 0)/\omega(1_m; s_1, ..., s_m)$$

を 2 通りに $P_\lambda(z) = P_\lambda(q^{z_1}, ..., q^{z_m}; -q^{-\frac{1}{2}})$ $(\lambda \in \Lambda_m^+)$ を係数とする等式に展開し，その係数を比べて局所密度を求める．

まず，Lemma 2.1 と Theorem 1 により，

$$[A] = \frac{c_{n,m}}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})} \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+} \mu^{pr}(\pi^\lambda, \pi^\xi)(-1)^{n(\lambda)+|\lambda|} q^{-\frac{n(\lambda)}{2} - \frac{m+1}{4}|\lambda|} P_\lambda(z). \tag{2.2}$$

一方，直接 Theorem 1 を用いて

$$\omega(\pi^\xi; s_1, ..., s_m, 0, ..., 0) = (-1)^{n(\xi)+|\xi|} q^{\frac{n(\xi)}{2} - \frac{n-1}{4}|\xi|} (1 - q^{-\frac{1}{2}})^n \frac{w_n(\xi)}{w_n(q^{-1})} \times [B] \times [P_\xi];$$

ここで

$$[P_\xi] \stackrel{\mathrm{def}}{=} P_\xi(q^{z_1^{(n)}}, ..., q^{z_n^{(n)}}; -q^{-\frac{1}{2}})$$

$$= (-1)^{(m-n)|\xi|} q^{\frac{m-n}{4}|\xi|} P_\xi(q^{z_1}, ..., q^{z_m}, q^{\frac{m+1}{4}}, (-q^{\frac{1}{2}}) q^{\frac{m+1}{4}}, ..., (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1} q^{\frac{m+1}{4}}; -q^{-\frac{1}{2}})$$

$$= (-1)^{(m-n)|\xi|} q^{\frac{2m-n+1}{4}|\xi|} \sum_{\substack{\mu \in \Lambda_m^+ \\ 0 \le {}^t\xi_i - {}^t\mu_i \le n-m}} q^{-\frac{m+1}{4}|\mu|} P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, ..., (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) P_\mu(z);$$

$$
\begin{aligned}
[B] &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1-q^{z_i^{(n)}-z_j^{(n)}-\frac{1}{2}}}{1+q^{z_i^{(n)}-z_j^{(n)}}} \\
&= \prod_{1\le i<j\le m} \frac{1-q^{z_i-z_j-\frac{1}{2}}}{1+q^{z_i-z_j}} \times \prod_{\substack{1\le i\le m\\ m<j\le n}} \frac{1-(-1)^{m-j+1}q^{z_i+\frac{m-2j-1}{4}}}{1+(-1)^{m-j+1}q^{z_i+\frac{m-2j+1}{4}}} \\
&\qquad\qquad \times \prod_{i=m+1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} \frac{1-(-1)^{i-j}q^{\frac{i-j-1}{2}}}{1+(-1)^{i-j}q^{\frac{i-j}{2}}} \\
&= \prod_{1\le i<j\le m} \frac{1-q^{z_i-z_j-\frac{1}{2}}}{1+q^{z_i-z_j}} \times \prod_{\substack{1\le i\le m\\ m<j\le n}} \frac{1-(-q^{-\frac{1}{2}})q^{z_i}\cdot(-1)^{j-m}q^{\frac{m-2j+1}{4}}}{1-q^{z_i}\cdot(-1)^{j-m}q^{\frac{m-2j+1}{4}}} \\
&\qquad\qquad \times \frac{w_{n-m}(q^{-1})}{w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}})(1-q^{-\frac{1}{2}})^{n-m}}.
\end{aligned}
$$

上の第2の因子 ($1\le i\le m$ と $m<j\le n$ に関する積の部分) は (1.14) によって，さらに次のように変形される：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu\in\Lambda_m^+\cap\Lambda_{n-m}^+} (-q^{-\frac{m+1}{4}})^{|\nu|} b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}}) P_\nu(z) P_\nu(1, -q^{-\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{-\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) \\
&= w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}}) \sum_{\nu\in\Lambda_m^+\cap\Lambda_{n-m}^+} (-1)^{n(\nu)+|\nu|} q^{-\frac{n(\nu)}{2}-\frac{m+1}{4}|\nu|} \times \frac{b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n-m}(\nu)} P_\nu(z).
\end{aligned}
$$

さて

$$
\omega(1_m; s_1, \dots, s_m) = (1-q^{-\frac{1}{2}})^m \frac{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_m(q^{-1})} \prod_{1\le i<j\le m} \frac{1-q^{z_i-z_j-\frac{1}{2}}}{1+q^{z_i-z_j}}
$$

であるから，上の計算と合わせて

$$[A] = (-1)^{n(\xi)+(m-n+1)|\xi|} q^{\frac{n(\xi)}{2}+\frac{m-n+1}{2}|\xi|} c_{n,m} \frac{w_n(\xi)}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})}$$

$$\times \sum_{\nu\in\Lambda_m^+\cap\Lambda_{n-m}^+} \frac{(-1)^{n(\nu)+|\nu|} q^{-\frac{n(\nu)}{2}-\frac{m+1}{4}|\nu|} b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n-m}(\nu)}$$

$$\times \sum_{\substack{\mu\in\Lambda_m^+ \\ 0\le {}^t\xi_i-{}^t\mu_i\le n-m}} q^{-\frac{m+1}{4}|\mu|} P_{\xi/\mu}(1,-q^{\frac{1}{2}},\dots,(-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1};-q^{-\frac{1}{2}})$$

$$\times \sum_{\lambda\in\Lambda_m^+} f_{\mu,\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) P_\lambda(z)$$

$$= (-1)^{n(\xi)+(m-n+1)|\xi|} q^{\frac{n(\xi)}{2}+\frac{m-n+1}{2}|\xi|} c_{n,m} \frac{w_n(\xi)}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})}$$

$$\times \sum_{\lambda\in\Lambda_m^+} q^{-\frac{m+1}{4}|\lambda|} P_\lambda(z) \left\{ {\sum_{\mu,\nu}}' (-1)^{n(\nu)+|\nu|} q^{-\frac{n(\nu)}{2}} \frac{b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n-m}(\nu)} \right. \tag{2.3}$$

$$\left. \times P_{\xi/\mu}(1,-q^{\frac{1}{2}},\dots,(-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1};-q^{-\frac{1}{2}}) f_{\mu,\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) \right\}.$$

(2.3),(2.3) において $P_\lambda(z)$ の係数を比べて整理して与式を得る. ∎

Theorem 7 任意の $\xi\in\Lambda_n^+$, $\lambda\in\Lambda_m^+$ について

$$\mu(\pi^\lambda,\pi^\xi) = (-1)^{n(\xi)+n(\lambda)+(m-n+1)|\xi|+|\lambda|} q^{\frac{1}{2}(n(\xi)+n(\lambda)+(m-n+1)|\xi|)} \times \frac{w_n(\xi)}{w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}})}$$

$$\times {\sum_{\mu,\nu}}' \left\{ (-1)^{(n-m)|\nu|} q^{-\frac{n-m}{2}|\nu|} a_{n,m}(\nu) f_{\mu\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) \right.$$

$$\left. \times P_{\xi/\mu}(1,-q^{\frac{1}{2}},\dots,(-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1};-q^{-\frac{1}{2}}) \right\},$$

ここで ${\sum_{\mu,\nu}}'$ において μ,ν は

$\mu\in\Lambda_m^+$, $\nu\in\Lambda_m^+$, $\mu\subset\xi\cap\lambda$, $\nu\subset\lambda$, $|\lambda|=|\mu|+|\nu|$, $0\le {}^t\xi_i-{}^t\mu_i\le n-m$ $(i\ge 1)$

をみたすもの全体を動き,

$$a_{n,m}(\nu) = \sum_{\substack{\tau=(\tau_1,\tau_2)\in\Lambda_m^+\cap\Lambda_2^+ \\ \tau\geq\nu, |\tau|=|\nu|}} K_{\tau\mu}(-q^{-\frac{1}{2}})$$

$$\frac{\left((-1)^{(n-m-1)\tau_1} q^{\frac{n-m}{2}\tau_1} + (-1)^{n-m} q^{\frac{m-n}{2}} (-1)^{(n-m-1)\tau_2} q^{\frac{n-m}{2}\tau_2}\right)}{1+(-1)^{n-m} q^{\frac{m-n}{2}}}$$

とする *($K_{\tau\mu}(-q^{-\frac{1}{2}})$ については (1.16) を参照)*.

Proof. . Lemma 2.1 と Theorem 1 により，次の等式を得る：

$$\frac{c_{n,m}}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})} \sum_{\lambda\in\Lambda_m^+} (-1)^{n(\lambda)+|\lambda|} q^{n(\lambda)-\frac{m+1}{4}|\lambda|} \mu(\pi^\lambda, \pi^\xi) P_\lambda(z)$$

(2.4)

$$= \prod_{i=1}^{m} \left(1 - q^{-2s_i-\cdots-2s_m-n+i-1}\right)^{-1} \frac{\omega(\pi^\xi; s_1, \ldots, s_m, 0, \ldots, 0)}{\omega(1_m; s_1, \ldots, s_m)}.$$

Theorem 6 の証明の [B] の第 2 の因子について

$$\prod_{1\leq i\leq m} \prod_{r=1}^{n-m} \frac{1+(-1)^r q^{z_i - \frac{2r+m+1}{4}}}{1-(-1)^r q^{z_i - \frac{2r+m-1}{4}}} = \prod_{1\leq i\leq m} \frac{1+(-1)^{n-m} q^{z_i + \frac{m-2n-1}{4}}}{1+q^{z_i - \frac{m+1}{4}}}$$

となるので，

$$\prod_{i=1}^{m} \left(1 - q^{-2s_i-\cdots-2s_m-n+i-1}\right)^{-1}$$

と合わせて (1.15),(1.16) を使うと

$$\prod_{1\le i\le m}\frac{1}{(1+q^{z_i-\frac{m+1}{4}})(1-(-1)^{n-m}q^{z_i+\frac{m-2n-1}{4}})}$$

$$= \sum_{\tau\in\Lambda_m^+\cap\Lambda_2^+} P_\tau(q^{z_1},\dots,q^{z_m};0)P_\tau(-q^{-\frac{m+1}{4}},(-1)^{n-m}q^{\frac{m-2n-1}{4}};0) \quad (by(1.15))$$

$$= \sum_{\tau\in\Lambda_m^+\cap\Lambda_2^+}\left\{\sum_{\substack{\nu\in\Lambda_m^+\\ \tau\ge\nu,|\tau|=|\nu|}} K_{\tau,\nu}(-q^{-\frac{1}{2}})P_\nu(z)\right\}(-1)^{(n-m)|\tau|}q^{\frac{m-2n-1}{4}|\tau|}$$

$$\times\frac{\left((-1)^{(n-m-1)\tau_1}q^{\frac{n-m}{2}\tau_1}+(-1)^{n-m}q^{\frac{m-n}{2}}(-1)^{(n-m-1)\tau_2}q^{\frac{n-m}{2}\tau_2}\right)}{1+(-1)^{n-m}q^{\frac{m-n}{2}}}$$

$$= \sum_{\nu\in\Lambda_m^+}(-1)^{(n-m)|\nu|}q^{\frac{m-2n-1}{4}|\nu|}a_{n,m}(\nu)\cdot P_\nu(z).$$

Theorem 6 の証明で計算してある残りの部分と合わせると，

$$(2.4)\text{ の右辺} = c_{n,m}\frac{w_n(\xi)}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}})}(-1)^{n(\xi)+(m-n+1)|\xi|}q^{\frac{n(\xi)}{2}+\frac{m-n+1}{2}|\xi|}$$

$$\times\sum_{\substack{\mu\in\Lambda_m^+\\ 0\le{}^t\xi_i-{}^t\mu_i\le n-m}} q^{\frac{m+1}{4}|\mu|}P_{\xi/\mu}(1,-q^{\frac{1}{2}},\dots,(-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1};-q^{-\frac{1}{2}})P_\mu(z)$$

$$\times\sum_{\nu\in\Lambda_m^+} q^{\frac{m-2n-1}{4}|\nu|}(-1)^{(n-m)|\nu|}a_{n,m}(\nu)P_\nu(z)$$

$$= c_{n,m}\frac{w_n(\xi)}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}})}(-1)^{n(\xi)+(m-n+1)|\xi|}q^{\frac{n(\xi)}{2}+\frac{m-n+1}{2}|\xi|}$$

$$\times\sum_{\lambda\in\Lambda_m^+}P_\lambda(z)\left\{\sum_{\mu,\nu}{}' f_{\mu,\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{m+1}{4}|\mu|}P_{\xi/\mu}(1,-q^{\frac{1}{2}},\dots,(-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1};-q^{-\frac{1}{2}})\right.$$

$$\left.\times\, q^{\frac{m-2n-1}{4}|\nu|}(-1)^{(n-m)|\nu|}a_{n,m}(\nu)P_\nu(z)\right\}.$$

この式と (2.4) の左辺における $P_\lambda(z)$ の係数を比べ，整理して与式を得る． ∎

References

[C] W. Casselman: The unramified principal series of $\mathfrak{p}$-adic groups I. The spherical functions, *Compositio Mathmatica* **40**(1980), 387–406.

[H1] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric froms I, *Japanese Journal of Mathematics* **14**(1988), 203–223.

[H2] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric froms II, *Japanese Journal of Mathematics* **15**(1989), 15–51.

[H3] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric froms III, *Tôhoku Mathematical Journal of Mathematics* **40**(1988), 651–671.

[H4] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric froms over 2-adic fields, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **39**(1990), 157–193.

[HS] Y. Hironaka and F. Sato: Spherical functions and local densiteis of alternating forms, *American Journal of Mathematics* **110**(1986), 473–512.

[LS] A. Lascoux and M. P. Schützenberger: Sur les conjecture de H. O. Foulkes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **286A**(1978), 323–324.

[M] I. G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, 1979